

考虑孔隙水压力的土坡稳定性的有限元下限分析

王均星, 李 泽, 陈 炜

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072)

摘 要: 以极限分析下限法理论为基础, 应用有限单元思想离散结构物, 建立了同时满足平衡条件、应力边界条件、屈服条件和应力间断条件的静力许可应力场, 其中孔隙水压力被当作一种类似于重力的外力荷载。引入线性数学规划手段后, 得到了考虑孔隙水压力的边坡稳定的下限法数学规划模型, 由此可以求出安全系数的下限解及其对应的应力场。最后, 以 2 个经典的土坡为算例, 与多种方法的分析结果比较, 论证了该方法的正确性。

关 键 词: 塑性极限分析; 下限法; 孔隙水压力; 边坡稳定; 安全系数

中图分类号: TU 413

文献标识码: A

Lower bound analysis of soil slope stability using finite elements subjected to pore water pressure

WANG Jun-xing, LI Ze, CHEN Wei

(State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: Based on the theory of lower bound limit analysis, finite element are used to discretize the mechanism. The statically admissible stress fields that are satisfied the conditions of equilibrium, stress boundary, yielding and stress discontinuity, are constructed. The pore water pressure is considered as an external force, similar to gravity. By using the idea of linear programming, lower bound limit analysis models of mathematical programming for slope stability are established; the model can evaluate the safety factors and stress field of lower bound. Finally, taking two classical soil slopes for examples of calculating slope stability, the comparisons among the results of various methods are made. The results indicate the correctness of the method and the program.

Key words: plastic limit analysis; lower bound; pore water pressure; slope stability; safety factor

1 前 言

边坡稳定性问题在岩土工程界一直被广泛关注。很多年以来, 许多学者致力于这方面的研究, 取得了丰富的研究成果。在实际应用中, 目前采用最多的分析方法是刚体极限平衡法, 但由于其引入了许多假定, 使得边坡在极限状态时既不满足静力容许条件, 也不满足机动容许条件, 所以由刚体极限平衡法得到的解只是近似解。

塑性极限分析法中的上、下限理论为寻求边坡稳定的精确解提供了一条新的思路。上、下限法具有严格的理论基础和物理意义, 但长期以来如何构造上限法的机动容许位移场和下限法的静力容许应力场一直是个难点, 直到有限单元法被引入塑性极限分析领域才成功地解决了这一困难。值得一提的

是, 1988 年澳大利亚学者 S.W.Sloan 将下限法与有限元法相结合, 考虑单元之间相邻边上的应力间断, 将理想塑性土体的平面应变问题的下限分析归结为求解一个线性规划问题, 并成功地应用于地基承载力计算, 得到了精确的结果^[1]。1995 年 Sloan 又提出了考虑速度间断的上限有限元塑性极限分析法^[2]。

笔者也一直致力于塑性极限分析方面的研究^[3~5]。本文在文献[3, 4]研究基础上, 考虑边坡中孔隙水压力的作用, 提出了考虑孔隙水压力的土坡稳定性的有限元下限分析法。

2 考虑孔隙水压力的下限法数学模型

在有限单元离散结构的基础上, 考虑单元各结点的孔隙水压力的作用, 以结点有效应力为未知量, 根据下限法静力许可场的约束条件和边坡稳定

的目标函数, 可以建立考虑孔隙水压力的下限法数学模型。

2.1 孔隙水压力

孔隙水压力的影响是边坡稳定性分析中需要考虑的一个关键因素。土的抗剪强度与土体内的孔隙水压力密切相关。本文采用简化方法确定各点的孔隙水压力大小, 假定土体内流场的等势线是铅直的, 某点的孔隙水压力的水头等于该点至浸润线的铅直距离。在考虑孔隙水压力对土体结构的作用时, 把孔隙水压力看作是一种外力荷载, 其作用类似于重力荷载。把土骨架当作极限分析有限元法中的研究对象。

2.2 结构的离散

本文结构物离散采用与文献[4]相同的方式, 考虑孔隙水压力后, 每个节点增加一个孔隙水压力变量, 如图 1 所示。

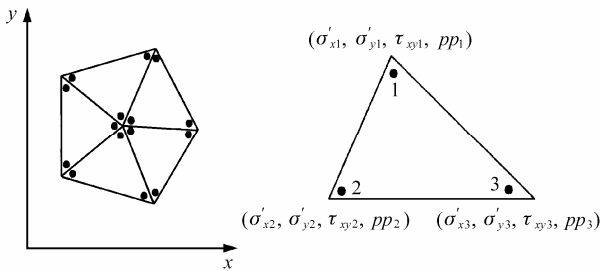


图 1 下限法单元应力模式
Fig. 1 Stress of lower limit method

则单元内任意一点的应力分量可表示为结点应力分量的线性函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sum_{i=1}^3 N_i \sigma'_{xi}; \quad \sigma'_y = \sum_{i=1}^3 N_i \sigma'_{yi}; \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^3 N_i \tau_{xyi}; \quad pp = \sum_{i=1}^3 N_i pp_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 σ'_x , σ'_y 为单元内部任一点的有效正应力; τ_{xy} 为单元内部任一点的剪应力; σ'_{xi} , σ'_{yi} 为 i 结点处的有效正应力; τ_{xyi} 为 i 结点处的剪应力; pp 为单元内部任意一点的孔隙水压力; pp_i 为 i 结点处的孔隙水压力; N_i 为形函数, 具体表达式参见一般有限元著作。

2.3 下限法约束条件

下限法约束条件如文献[4]所述, 包括: 平衡方程约束、应力间断面连续条件约束、应力边界条件约束、屈服条件约束, 前 3 个为线性等式约束, 最后一个为线性不等式约束。在这 4 个约束条件中都要计入孔隙水压力的影响, 详述如下。

2.3.1 单元平衡约束条件

考虑孔隙水压力后, 平面问题平衡方程的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} x \text{ 方向: } & \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial pp}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ y \text{ 方向: } & \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial pp}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 γ 为材料的重度。将式 (1) 代入式 (2), 即得三角形平衡方程的结点应力表达式。写成矩阵形式如下:

$$[A_{\text{equil}}^e] \sigma^e = b_{\text{equil}}^e \quad (3)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} [A_{\text{equil}}^e] &= \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \zeta_1 & \eta_2 & 0 & \zeta_2 & \eta_3 & 0 & \zeta_3 \\ 0 & \zeta_1 & \eta_1 & 0 & \zeta_2 & \eta_2 & 0 & \zeta_3 & \eta_3 \end{bmatrix}; \\ \sigma^e &= [\sigma'_{x1} \quad \sigma'_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma'_{x2} \quad \sigma'_{y2} \quad \tau_{xy2} \quad \sigma'_{x3} \quad \sigma'_{y3} \quad \tau_{xy3}]^T; \\ b_{\text{equil}}^e &= \begin{bmatrix} -(\eta_1^e pp_1^e + \eta_2^e pp_2^e + \eta_3^e pp_3^e) \\ 2A^e \gamma^e - (\zeta_1^e pp_1^e + \zeta_2^e pp_2^e + \zeta_3^e pp_3^e) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式 (4) 可知, 根据平衡条件每个单元可得到 2 个等式约束, 其中 ξ_i , η_i , ζ_i 的具体表达式参见一般有限元著作。

2.3.2 应力间断面连续约束条件

图 2 所示 A, B 两个相邻单元, d 为一个倾角是 θ^d 的应力间断面。根据间断面的平衡条件, 必须保证相邻边上应力的法向分量 $\sigma_n'^d$ 和切向分量 τ^d 大小相等。因而对图 2 所示的任意公共边上的应力应满足:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{na}^d &= \sigma_{nb}^d \equiv \sigma_{na}^d + p_a^d = \sigma_{nb}^d + p_b^d \equiv \sigma_{na}^d = \sigma_{nb}^d; \\ \tau_a^d &= \tau_b^d; \quad pp_a^d = pp_b^d \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对于任一条与 x 轴夹角为 θ^d (逆时针方向为正) 的公共边, 其法向分量、切向分量可用整体坐标下的应力分量表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n'^d &= \sin^2 \theta^d \sigma'_x + \cos^2 \theta^d \sigma'_y - \sin 2\theta^d \tau_{xy}^d; \\ \tau^d &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta^d \sigma'_x + \frac{1}{2} \sin 2\theta^d \sigma'_y + \cos 2\theta^d \tau_{xy}^d \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由应力间断面连续条件, 式 (5) 可变为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1}^d &= \sigma_{n2}^d; \quad \tau_1^d = \tau_2^d, \quad 1, 2 \text{ 点连续} \\ \sigma_{n3}^d &= \sigma_{n4}^d; \quad \tau_3^d = \tau_4^d, \quad 3, 4 \text{ 点连续} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

通过坐标转换, 可得到上式的用整体坐标下的应力分量表示的矩阵形式:

$$[A_{\text{equil}}^d] \sigma^d = b_{\text{equil}}^d \quad (8)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} [A_{\text{equil}}^d] &= \begin{bmatrix} T_1 & -T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & -T_1 \end{bmatrix}; \\ [T_1] &= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta^d & \cos^2 \theta^d & -\sin 2\theta^d \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta^d & \frac{1}{2} \sin 2\theta^d & \cos 2\theta^d \end{bmatrix}; \\ \sigma^d &= \{\sigma_{x1}^d, \sigma_{y1}^d, \tau_{xy1}^d, \sigma_{x2}^d, \sigma_{y2}^d, \tau_{xy2}^d, \\ &\quad \sigma_{x3}^d, \sigma_{y3}^d, \tau_{xy3}^d, \sigma_{x4}^d, \sigma_{y4}^d, \tau_{xy4}^d\}^T; \\ b_{\text{equil}}^d &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由式(8)可知,任一条公共边将产生4个等式约束。

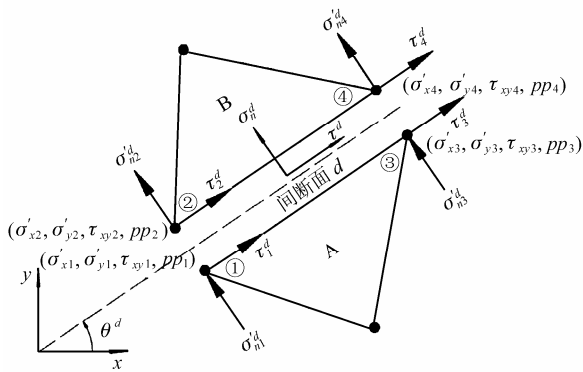


图2 单元之间应力不连续面

Fig.2 Stress discontinuity between elements

2.3.3 应力边界约束条件

对于边坡问题,作用在边界上的复杂边界荷载(图3)都可以分段地用线性分布荷载逼近,根据下限定理的应力边界条件有:

$$\sigma_n^l = \sigma_n^l + pp^l = q_n^l; \tau^l = t_n^l \quad (10)$$

实际上只要结点应力满足下面条件即可保证式(10)严格成立。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1}^l &= \sigma_n^l + pp_1^l = q_1^l; \tau_1^l = t_1^l, \text{ 结点1} \\ \sigma_{n2}^l &= \sigma_n^l + pp_2^l = q_2^l; \tau_2^l = t_2^l, \text{ 结点2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

通过坐标转换,将式(11)写成整体坐标下应力的矩阵形式:

$$[A_{\text{bound}}^l] \sigma^l = b_{\text{bound}}^l \quad (12)$$

其中:

$$[A_{\text{bound}}^l] = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}, [T] = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta^l & \cos^2 \theta^l & -\sin 2\theta^l \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta^l & \frac{1}{2} \sin 2\theta^l & \cos 2\theta^l \end{bmatrix},$$

θ^l 为应力边界与 x 轴正方向的夹角,逆时针方向为正; $\{\sigma^l\} = [\sigma_{x1}^l, \sigma_{y1}^l, \tau_{xy1}^l, \sigma_{x2}^l, \sigma_{y2}^l, \tau_{xy2}^l]^T$; $\{b_{\text{bound}}^l\} = [q_1^l - pp_1^l, t_1^l, q_2^l - pp_2^l, t_2^l]^T$ 。

由式(12)可知,每条应力边界将产生4个等式约束。

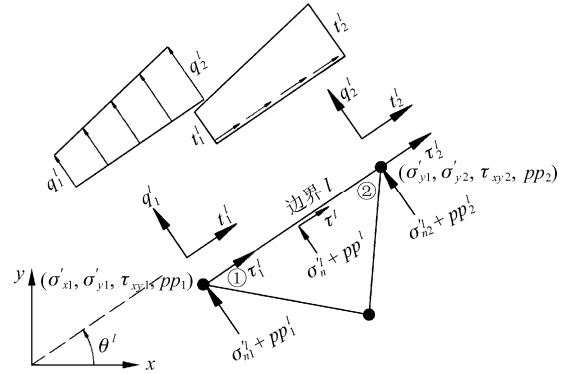


图3 下限法应力边界条件

Fig.3 Stress boundary of lower limit method

2.3.4 屈服约束条件

本文采用 Mohr-Coulomb 屈服准则。对于平面应变问题,根据有效应力得到的 Mohr-Coulomb 屈服准则可表示为

$$F = (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \varphi - (\sigma'_x + \sigma'_y) \sin \varphi]^2 \quad (14)$$

式中 c , φ 分别为材料的凝聚力和内摩擦角。按照文献[4]中将屈服条件线性化的方法,可以得到用有效应力表示的屈服条件约束矩阵:

$$[A_{\text{yield}}^n] \sigma^n = b_{\text{yield}}^n \quad (15)$$

其中 $n=1, 2, \dots, N$, N 为结点总数,

$$\left. \begin{aligned} [A_{\text{yield}}^n] &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_k & B_k & C_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p & B_p & C_p \end{bmatrix}; \sigma^n = \{\sigma_{x'}^n, \sigma_{y'}^n, \tau_{xy}^n\}^T; \\ b_{\text{yield}}^n &= \{D \ D \ \dots \ D\}^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

A , B , C , D , p 的意义参见文献[3]。由式(15)可知,每个结点可产生 p 个不等式线性约束。

2.4 下限法目标函数

在本文中只考虑自重作为外荷载的情况,建立以下两种目标函数。

2.4.1 求重度超载系数的目标函数

求重度超载系数的目标函数为

$$\max: \quad C^T x = \gamma' \quad (17)$$

其中,

$$C^T = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]; x = \{\sigma'_{x1} \ \sigma'_{y1} \ \tau_{xy1} \ \cdots \ \tau_{xyN} \ \gamma'\}^T \quad (18)$$

由式(17)可得到重度的极大值 γ' , 则重度超载系数 $k_1 = \gamma'/\gamma$, γ 为材料的原始重度。

2.4.2 求强度储备系数的目标函数

采用强度储备系数来定义安全系数, 即

$$k_2 = \tan \varphi / \tan \varphi_0 = c / c_0 \quad (19)$$

为避免非线性规划问题, 本文采用与文献[7]类似的迭代法思想求解。

2.5 线性数学规划问题的最优化

综合前面讨论的平衡方程、应力间断条件、应力边界条件、屈服条件和目标函数, 对式(3)、式(8)、式(12)、式(15)、式(17)进行集合并整理, 得到下限法线性数学规划模型:

$$\begin{cases} \text{Minimize:} & -C^T x \\ \text{Subject to:} & [A_1]X = B_1; [A_2]X \leq B_2 \end{cases} \quad (20)$$

其中: $[A_1] = \sum_{e=1}^E [A_{\text{equil}}^e] + \sum_{d=1}^D [A_{\text{equil}}^d] + \sum_{l=1}^L [A_{\text{bound}}^l]$ 为

总体等式约束矩阵; $[A_2] = \sum_{n=1}^N [A_{\text{yield}}^n]$ 为总体不等式约

束矩阵; $B_1 = \sum_{e=1}^E b_{\text{equil}}^e + \sum_{d=1}^D b_{\text{equil}}^d + \sum_{l=1}^L b_{\text{bound}}^l$; $B_2 = \sum_{n=1}^N b_{\text{yield}}^n$;

E 为单元总数; D 为各单元公共边总数; L 为单元边界边总数。式(20)为一个线性数学规划问题, 在本文中采用内点算法^[8]求解。

3 程序编制

根据所建立的数学模型, 编制了考虑孔隙水压力的边坡稳定下限法程序 LBLPW.FOR, 程序包括以下四部分内容:

(1) 前处理: 用离散化的网格代替连续实体结构或求解区域, 生成计算模型所需要的单元、结点、公共边、边界等信息, 并输入材料参数、边界条件或约束、各类荷载信息等。

(2) 构建数学规划模型: 根据前处理程序生成的单元、结点、公共边、边界等信息, 以结点应力为未知量, 由单元平衡条件、应力间断面连续条件、应力边界条件等、屈服条件, 生成相应的约束矩阵, 并由建立目标函数, 生成下限法线性规划模型。

(3) 优化求解: 对于生成的下限法线性规划模型, 使用优化算法进行优化计算, 求出极限静力许可应力场。

(4) 后处理: 对计算结果进行分析、整理和归纳。

4 算例

根据上面介绍的方法, 采用编制的下限法程序对2个经典边坡的稳定性进行了计算, 比较了多种方法的计算结果, 论证了本文方法的正确性。

4.1 二维均质土坡算例

图4所示边坡为一个均质土坡。J. Kim, 殷建华^[10]等都对该边坡的稳定性进行了计算分析。为了比较方便, 本文选取与文献[10]类似的计算方案, 即深度系数 $D=2$, $H=10$ m, $\beta=45^\circ$, 均质土体材料性质 $\gamma=18$ kN/m³, $c'=20$ kN/m³, $\varphi'=15^\circ$ 。水头高度分别取: $H_w=2$ m, $H_w=4$ m, $H_w=6$ m。本文同样采用3种不同密度的网格进行计算, 图5为细网格的示意图, 计算得到的安全系数(强度储备系数)见表1。由于篇幅有限, 只给出了 $H_w=4$ m时的密网格得到的主应力矢量图(图6)。

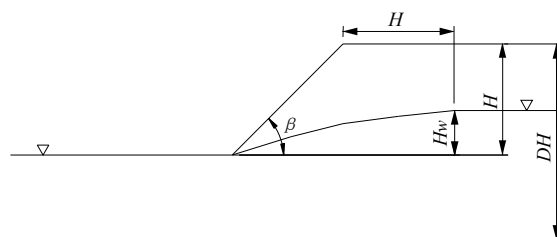


图4 均质二维边坡断面示意图
Fig.4 A simple homogeneous slope

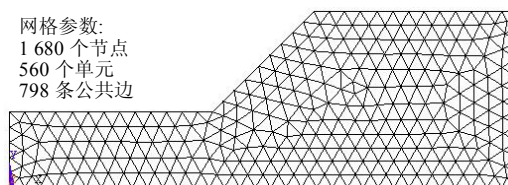


图5 均质土坡有限元网格划分示意图(细网格)
Fig.5 Grid of homogeneous slope for lower limit method (fine mesh)

表1 均质土坡安全系数计算结果

Table 1 Results of factor of safety in example 1

H_w /m	Kim 的计算结果		Bishop 法	文献[9] 结果	本文方法		
	下限法	上限法			粗网格	中等网格	细网格
2	1.101	1.23	1.166		0.885	0.942	1.048
4	1.036	1.166	1.101	1.202	0.873	0.928	1.001
6	0.971	1.068	1.068	1.096	0.842	0.903	0.964

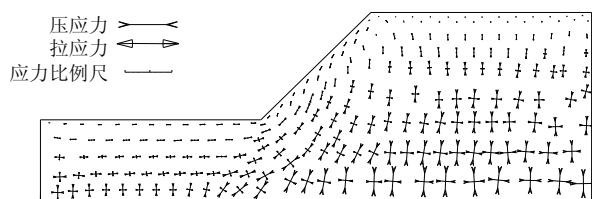


图 6 均质土坡主应力矢量图
Fig.6 Principal stress vector diagram of homogeneous slope

由计算结果可知, 计算精度与网格的疏密程度有关, 网格越密, 精度越高; 但网格的加密也会导致计算量的增加。坡体的稳定性随着地下水水头的升高而减小, 符合实际规律。

4.2 二维非均质土坡算例

图 7 为边坡为澳大利亚计算机应用协会(ACADS)边坡稳定分析程序考核题^[9]。边坡包含 3 个土层, 图中折线 $ABCDE$ 为浸润线, 土体力学参数详见表 2。此算例也采用 3 种不同密度的网格进行计算, 图 8 为细网格示意图, 计算结果见表 3, 图 9 为密网格计算得到的主应力矢量图。

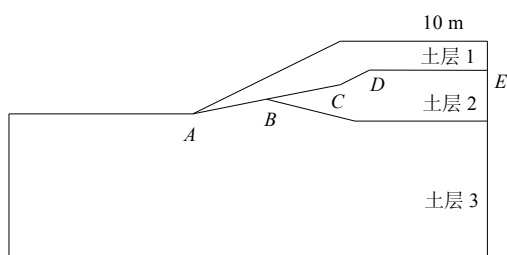


图 7 非均质土坡断面示意图
Fig.7 An inhomogeneous slope

表 2 算例 2 的土体材料力学参数
Table 2 Soil parameters in example 2

土层号	粘聚力 c / kPa	内摩擦角 γ / (°)	重度 γ / $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$
1	0.0	38.0	19.5
2	5.3	23.0	19.5
3	7.2	20.0	19.5

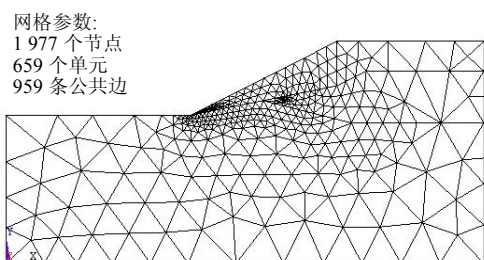


图 8 非均质土坡有限元网格划分示意图 (细网格)
Fig.8 Grid of inhomogeneous slope for lower limit method (fine mesh)

表 3 非均质土坡安全系数计算结果
Table 3 Results of safety factors in Example 2

安全系数	文献[9]	文献[10]	本文方法		
			粗网格	中等网格	细网格
量值	1.230	1.217	1.136	1.194	1.211

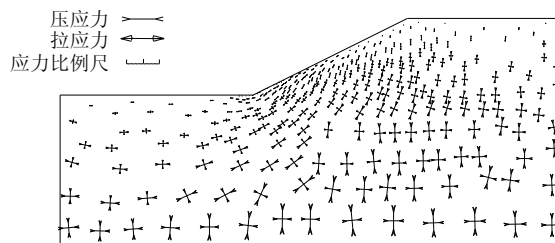


图 9 非均质土坡主应力矢量图
Fig.9 Principal stress vector diagram of inhomogeneous slope

5 结 语

(1) 边坡稳定分析方法研究是一个综合性研究课题, 本文在已有研究成果的基础上进行了深入地研究, 将有限元塑性极限分析下限法应用到考虑孔隙水压力条件下的土坡稳定性分析, 这在边坡稳定数值分析方面有一定的理论参考价值, 对塑性极限分析法应用于边坡稳定分析有着十分重要的意义。

(2) 本文成功的在有限元塑性极限分析中考虑了孔隙水压力的作用, 孔隙水压力被当作一种外力荷载作用于各结点之上, 下限法中以结点有效应力为未知量, 在各约束方程中计入了孔隙水压力的影响。

(3) 本文在确定孔隙水压力大小时作了简化处理, 如何更精确考虑孔隙水压力的作用是今后需要研究探索的。特别是孔隙水压力与应力状态是耦合的, 在塑性极限分析过程中需要应用固结理论研究孔隙水压力消散问题。

参 考 文 献

- [1] Sloan S W. Lower bound limit analysis using finite element and linear programming[J]. *International Journal Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, 12: 61—77.
- [2] Sloan S W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. *Computer Methods Application Mechanics Engineering*, 1995, 127: 293—314.
- [3] 王汉辉, 王均星, 王开治. 边坡稳定的有限元塑性极限分析. *岩土力学*, 2003, 24(5): 733—738.
WANG Han-hui, WANG Jun-xing, WANG Kai-zhi. Plastic limit analysis of slope stability using finite element[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2003, 24(5): 733—738.

- [4] 王均星, 王汉辉, 张优秀, 等. 非均质土坡有限元塑性极限分析. 岩土力学, 2004, 25(3): 415—421.
WANG Jun-xing, WANG Han-hui, ZHANG You-xiu, et al. Plastic limit analysis of heterogeneous soil slope using finite elements[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(3): 415—421.
- [5] 王开治, 王均星. 重力坝塑性极限分析[J]. 大坝与安全, 2000, (4): 12—18.
WANG Kai-zhi, WANG Jun-xing. Plastic limit analysis of gravity dam[J]. **Large Dam & Safety**, 2000, (4): 12—18.
- [6] Kim J, Salgado R. Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1999, (49): 49—57.
- [7] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的运用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 84—89.
LI Guo-ying, SHEN Zhu-jiang. Lower bound limit analysis using finite element and its application in soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1997, 19(5): 84—89.
- [8] 杨冰. 实用最优化方法及计算机程序[M]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院出版社, 1994.
- [9] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析原理. 方法. 程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [10] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的刚体有限元上限分析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 273—277.
YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE Chack-fan. A rigid finite element method for upper bound limit analysis of soil slopes subjected to pore water pressure[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(3): 273—277.